

# SPH法における固体境界インタラクションの改良

## Solid Boundary Handling Method for SPH

藤澤誠†

三浦憲二郎‡

Makoto FUJISAWA† and Kenjiro T. MIURA‡

† 筑波大学 † University of Tsukuba

‡ 静岡大学 ‡ Shizuoka University

E-mail: †fujis@slis.tsukuba.ac.jp, ‡tmkmiur@ipc.shizuoka.ac.jp

## 1 はじめに

コンピュータグラフィックスにおいて水や煙、炎といった流体表現は欠かせない要素の一つとなっている。これらの流体は自身の内部影響だけでなく、周囲の固体境界との相互作用によってもその挙動が変化する。例えば、コップに水を注ぐ、海上を船が波を立てながら進むといったシーンでは固体-液体間の相互作用が重要となる。

流体シミュレーションではオイラー的アプローチであるグリッド法とラグランジュ的アプローチである粒子法が広く用いられている。そして粒子法はその計算速度と拡張の容易さからコンピュータグラフィックス分野における液体表現に広く用いられている。粒子法の中でも陽的な方法であるSPH法は特にリアルタイムアプリケーションに適しており、様々な改良手法が提案されている。SPH法を用いた液体表現では2つの大きな問題、

1. 体積保存性
2. 固体境界の取り扱い

を解決する必要がある。(a)に関しては反復的な計算を行うことで、ある程度解決できる手法が提案されている。(b)の固体境界についてはポリゴンや陰関数で表される固体など流体以外の物体と流体を表す粒子のインタラクションをどのようにするかということである。特に境界付近において粒子の密度が低くなることで、境界に接した粒子がクラスタリングしてしまうということが大きな問題となる。一般的には境界内に固体粒子を配置することで解決するが、境界形状が複雑な場合には対応することが難しい。また、粒子数の大幅な増加も問題となる。

本論文では境界を多項式で表し、そこから補正量を直接計算する方法を導入することで、固体境界内部に粒子を配置することなく、クラスタリングの問題を解決する。従来手法では補正量は平面境界との距離に応じてスプライン関数で近似されていたが、これを境界形状が多項式で表されると仮定することで補正量計算のための積分を直接解く。さらに非圧縮性を保つために位置ベースの粒子法[10]と組み合わせ、また、境界表現に多項式を用いるSLIM[14]を

用いることで、複雑な形状へも対応することが可能であることを示す。

## 2 関連研究

Müllerら[13]はSPH法を用いることで3次元の粘性流体のリアルタイムシミュレーションを可能にした。SPH法は陽的に計算を行うことで非常に高速に液体の振る舞いを計算することができるのだが、一方で液体の重要な性質である非圧縮性に欠けるという欠点がある。これを解決するためにClavetら[6]は2種類の重み関数により粒子間の距離を一定になるようにした。また、Beckerら[3]は圧力計算にTait方程式を用い、ある程度の非圧縮性を確保するWCSPH法を提案し、Solenthalerら[16]はステップの最初に計算した予測密度を反復的に修正するPCISPH法によりより安定した計算を可能とした。しかし、これらの手法は安定した計算のためには非常に小さいタイムステップ幅が要求され、リアルタイムアプリケーションには不向きである。MacklinとMüller[10]は密度変化を拘束条件として、粒子位置を直接修正することで高い圧縮性を保ちつつ、リアルタイム計算が可能なタイムステップ幅でも安定した方法を提案した。本論文では彼らの方法を用いて液体の挙動をシミュレーションする。

粒子法において固体境界とのインタラクションを解決する方法として最も一般的なのは粒子が固体内にめり込んだ量に応じて力を返すペナルティ法である[12, 11]。この方法では境界付近で粒子密度が低くなり、結果として粒子分布が不均一になってしまう。Haradaら[7]はこの問題に対して平面境界内の仮想的なパーティクル分布を仮定して、前計算した壁重み関数を使うことで解決した。これに対して固体を粒子の集合として近似することで液体-固体間のインタラクションを行う方法も開発されている[5, 2, 4]。Ihmsenら[8]は境界内に流体物理量を外挿することで固体境界付近の粒子分布を改善し、SchechterとBridson[15]はこれを拡張して界面張力で流体が固体に張り付く現象も再現した。これらの方法は正確な圧力計算のために多くの固体粒子が必要となる。Akinciら[1]は仮想的な体積を設定することで1層の固体粒子だけでも粒子がクラスタリング

しない方法を提案している。

Kulasegaram ら [9] は境界付近における密度計算式の改良によって、固体内に粒子を配置することなくクラスタリングを防ぐ方法を提案した。境界付近における粒子の密度計算において、その有効半径内における固体境界部分占有領域を考慮に入れた補正を行うことで密度の低下を防いでいる。しかし、彼らは平面境界のみしか考慮しておらず、補正量の計算もスプライン曲線フィッティングに基づく近似的なものであった。本論文では境界を多項式で表し、そこから補正量を直接計算する。また、境界表現に多項式を用いる SLIM[14] を用いることで複雑な形状へも対応する。

## 2.1 流れの計算

流体の流れを計算するためにパーティクル法の一つである SPH 法を用いる。支配方程式である非圧縮のナビエ・ストークス方程式は以下である。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f} \quad (2)$$

ここで、 $t$  は時間、 $\mathbf{u}$  は流体速度、 $\nu$  は動粘性係数、 $\rho$  は流体の密度、 $p$  は圧力、 $\mathbf{f}$  は外力である。支配方程式をパーティクルで離散化し近似的に解く。パーティクル自体が液体を表しているため、パーティクル質量が変化しないかぎり質量保存性が常に保持され (質量保存式である式 (1) を解く必要がない)、グリッド法において計算時間のかかる処理である液体表面追跡の必要性がないことが利点である。SPH 法による物理量  $\phi$  の離散化式を以下に示す。

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{j \in N} m_j \frac{\phi_j}{\rho_j} W(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}, h) \quad (3)$$

ここで、 $N$  は近傍パーティクルの集合、 $m$  はパーティクル質量、 $\rho$  はパーティクル密度、 $W$  はカーネル関数である。物理量の勾配  $\nabla \phi$  はカーネル関数の導関数を用いて表される。ある粒子  $i$  の密度  $\rho_i$  は以下の式で計算される。

$$\rho_i = \sum_{j \in N} m_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \quad (4)$$

SPH 法では質量保存は保証されるものの体積保存性 (非圧縮性) はそのままでは考慮されない。本研究では位置ベース粒子法 [10] を用いて非圧縮性を実現する。位置ベース粒子法では密度制約条件を満たすように CFM を用いて粒子位置を修正していくことで非圧縮性をシミュレーションする。位置の修正は 1 ステップ内で密度変動がユーザの設定した値以下になるか最大反復回数に達するまで繰り返し実行される。十分な反復回数を設定すれば境界でのクラスタリングもある程度防ぐことができるが、その分計算時間が必要となる。[10] では境界粒子を用いる方法が解決策として示されているが、本研究ではそれとは異なるアプローチで固体境界との相互作用を実現する。

## 3 SPH 法における密度計算式の補正

式 (4) の密度計算は図 1 のように粒子  $i$  の位置座標  $\mathbf{x}_i$  内にある粒子の質量に対して、カーネル関数で重み付けして合計することで密度を計算している。カーネル関数は周囲に粒子が満たされていることを前提として、 $\int_V W d\mathbf{x} = 1$  となるように設定する。しかし、図 1 の灰色で表された領域を固体とすると、粒子  $i$  が固体境界に近づいたとき、有効半径内に粒子が存在しない領域が存在し、 $\int_V W d\mathbf{x} < 1$  となってしまうことが分かる。式 (4) は  $\int_V W d\mathbf{x} = 1$  を仮定しているので、結果として境界付近では密度が小さくなり、周囲の粒子を引きつけることになる。これが固体境界での粒子のクラスタリングを発生させる。クラスタリングは特に体積保存性を維持しようとするとき顕著に発生する。これに対して、固体境界内に固定した粒子を配置する方法 [1] や境界内に粒子が満たされていると仮定してその影響を前計算しておく方法 [7] がある。

本研究では密度計算式を導出する際の過程に注目し、補正量  $\gamma$  を含む以下の式を代わりに密度計算に用いる [9]。

$$\rho_i = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in N} m_j W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \quad (5)$$

ここで、

$$\gamma_i = \int_V W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}, h) d\mathbf{x} \quad (6)$$

である。従来の SPH 法では  $\gamma = 1$  と仮定することで式 (4) を用いていたが、前述の通り固体境界付近ではこの仮定は成り立たない。式 (5) を用いることで、固体内に粒子を配置しなくても固体のクラスタリングを防げる。一方で  $\gamma$  をどのようにして計算するのかが大きな問題となる。[9] では  $\gamma$  を平面境界までの距離で変化する関数としてスプライン曲線で近似したが、平面境界以外への拡張が難しい。そこで固体境界を多項式で表し、式 (6) の積分を直接計算する。

図 2 に示すようにある粒子の中心座標  $\mathbf{x}_i$  を原点とし、それに最も近い境界面の法線を  $z$  軸とした座標系を考える。このとき、 $\mathbf{x}_i$  を中心とした極座標  $(r, \theta, \phi)$  を用いると式 (6) は、

$$\gamma_i = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{g(\theta)} W(\mathbf{r}, h) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (7)$$

となる。ここで  $g(\theta)$  は原点から境界までの距離を表す関数であり、境界として 1 次多項式  $z = ax + by + c$  を仮定した場合、以下の式で計算される。

$$g(\theta) = \begin{cases} \frac{c}{\cos \theta} & \theta > \theta_1 \\ h & \theta \leq \theta_1 \end{cases} \quad (8)$$

$\theta_1$  は原点から固体と接している境界線までベクトルと  $z$  軸のなす角である。多項式の係数  $c$  は原点を  $\mathbf{x}_i$  とした座標系に座標変換されたものを用いる。

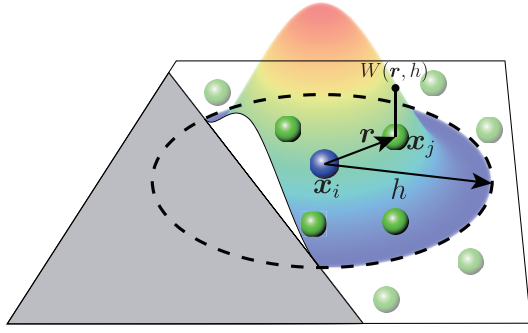


図 1: SPH 法におけるカーネル関数を用いた密度計算

1次多項式(平面)を仮定しているため  $g$  は  $\theta$  のみの関数としてあるが、2次以上の多項式ではこれは成り立たない。本研究では1次多項式を用いた SLIM 曲面により複雑な形状にも対応させているため式(8)をそのまま用いるが、より精度を高めるためには2次以上の多項式にも対応する必要があるだろう。

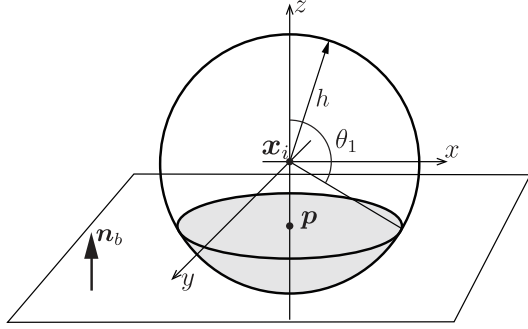


図 2:  $\gamma$  の計算領域

## 4 位置ベース粒子法

この章では補正量  $\gamma$  を位置ベース粒子法 [10] と組み合わせて用いる方法を説明する。

位置ベース粒子法では粒子  $i$  の密度制約条件として、

$$c_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \frac{\rho_i}{\rho_0} - 1 = 0 \quad (9)$$

を仮定する。ここで  $\rho_0$  は流体の初期密度である。式(9)から粒子移動後もこの制約が満たされる ( $c(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = 0$ ) として、粒子  $i$  の移動量  $\Delta\mathbf{x}_i$  を以下のようにして計算する。

$$\Delta\mathbf{x}_i = \frac{1}{\rho_0} \sum_{j \in N} (\lambda_i + \lambda_j) \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) \quad (10)$$

$\lambda$  はスケールリングファクタであり、

$$\lambda = -\frac{c_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)}{\sum_k |\nabla_{\mathbf{x}_k} c_i|^2 + \varepsilon} \quad (11)$$

と表される。分子の  $c_i$  は式(9)と式(5)から計算される。分母に関しては  $\nabla_{\mathbf{x}_k} c_i = \frac{1}{\rho_0} \nabla_{\mathbf{x}_k} \rho_i$  より、 $\nabla \rho_i$  が必要となる。 $\gamma_i$  を境界までの距離  $d$  を有効半径  $h$  で正規化した距離  $e = d/h$  に関する関数  $\gamma(e)$  とすると、式(5)より、

$$\nabla \rho_i = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{j \in N} m_j \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) - \frac{\rho_i}{\gamma_i h} \frac{\partial \gamma_i}{\partial e} \mathbf{n}_b \quad (12)$$

ここで  $\mathbf{n}_b$  は境界の法線である。 $k = i$  と  $k \neq i$  の2つの場合を考えて、最終的に

$$\nabla_{\mathbf{x}_k} c_i = \frac{1}{\rho_0 \gamma_i} \begin{cases} \sum_{j \in N} m_j \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) - \frac{\rho_i}{h} \mathbf{N}_b & k = i \\ -m_i \nabla W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k, h) & k \neq i \end{cases} \quad (13)$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{N}_b = \frac{\partial \gamma_i}{\partial e} \mathbf{n}_b$  とした。各計算ステップの最初に各粒子について  $\gamma$  と  $\mathbf{N}_b$  を計算した後、密度と  $\lambda$  を求めて式(10)に代入することで粒子の位置変位が得られる。

## 5 複数の多項式境界の合成

より複雑な固体境界形状を扱うために SLIM [14] を用いる。SLIM では階層的に分割した領域(ノード)ごとに多項式を用いることで形状を陰関数曲面として表す。補正係数  $\gamma$  の計算においても多項式を用いているので、その方法をそのまま適用することができる。ただし、領域が複数にまたがっていた場合の  $\gamma$  計算方法を考える必要がある。各粒子の中心座標  $\mathbf{x}_i$  から有効半径  $h$  内にある SLIM ノード  $j$  を探索する。ノード領域は球形であるので、ノード中心位置  $\mathbf{c}_j$  の距離計算だけで探索は可能である。そして範囲内にある各領域ごとに  $\gamma_j$  を求める。粒子の補正係数  $\gamma_i$  には単純に各領域で求めた値の重み付き平均を用いる。

$$\gamma_i = \frac{\sum_j W_g(\mathbf{c}_j - \mathbf{x}_i) \gamma_j}{\sum_j W_g(\mathbf{c}_j - \mathbf{x}_i)} \quad (14)$$

重み関数  $W_g$  にはガウス関数を用いる。単純な重み平均では実際には誤差が発生する。図3は式(14)で求めた値とモンテカルロ的な方法で積分を計算した各点の  $\gamma$  の近似値の差を描画したものである。2つのノードでそれぞれ平面が1次多項式として表されており、2平面間の角度は90度である。誤差は両ノード領域の中央部で大きくなり、最大で20%ほどであった。ノード間の角度が小さいほどこの誤差は小さくなる。また、角度が大きい場合は図3の中央部に見られるような直線形状の誤差が現れている。これは  $g(\theta)$  の  $\theta$  方向に2つの平面が含まれていた場合に  $\gamma$  が不正確に計算されたことが原因である。正確に求めるならば式(7)の計算時に各領域に占められる体積を考慮して積分すべきであるが、多くのノードが重なっているような場合には難しいため、本研究では式(14)の重み付き平均を用いる。

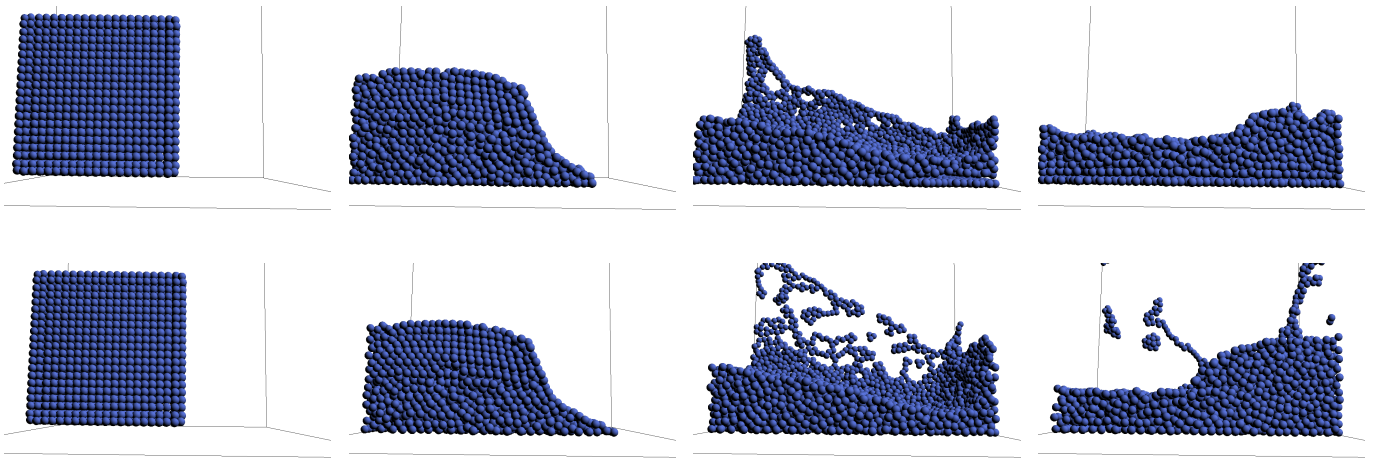


図 4: Dam Breaking シミュレーション (断面図). 上段は $\gamma$ による補正なしの場合, 下段は提案法による補正ありの結果

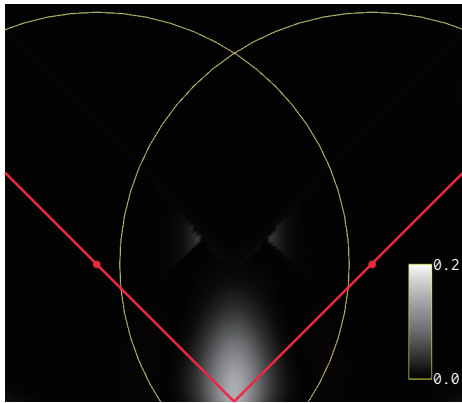


図 3: 離散的に求めた $\gamma$ 値との誤差

## 6 結果

提案手法を実装した結果を示す. カーネル関数には Poly6 カーネル [13] を用いた. 図 4 は直方体形状のタンク内に液体粒子の塊を落下させたシミュレーション (Dam Breaking) の結果である. 粒子数は約 9000 であり, 位置ベース粒子法の密度変動率は 0.03, 最大反復回数は 20 回とした. 図 4 では境界付近での粒子分布がわかりやすいように  $z = 0$  の断面で平面クリップして描画してある. 図 5 はシミュレーションがある程度進んだときの粒子分布を拡大して描画したものである. 密度補正を行わない従来手法の図 5(a) に対して, 密度補正を加えた図 5(b) は境界付近でも粒子がクラスタ化していないことが分かる. また, 粒子分布が均等になったことで全体的な体積も保存されている. なお, 図 4 において境界のエッジ部分で粒子が固まっていることが確認できた. これは図 3 の誤差が影響している可能性がある.

図 7 に SLIM 曲面で表されたボウル形状の固体に液体を

投入したときのシミュレーション結果を示す. 粒子数は約 12000, 密度変動率は 0.04, 最大反復回数は 10 回とした. また, SLIM ノード数は約 3700 である. 図 7 では粒子を直接描画するのではなく, 粒子から表面メッシュを生成し, それをレイトレーサを用いてレンダリングした. SLIM 曲面を用いることでより複雑な形状にも対応できている. 図 6 は図 5 と同様に密度補正がない場合とある場合の粒子の分布を比べたものである. SLIM 曲面を用いた場合でも境界付近で粒子が均等に分布していることが分かる. 図 8 はより複雑な形状として bunny 形状 (約 25000 ノード) を用いた場合である.

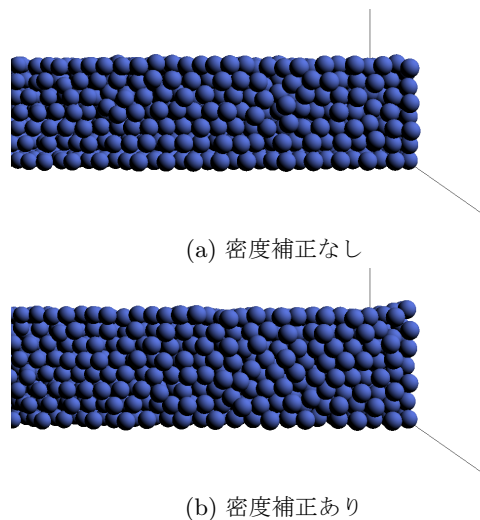


図 5: Dam Breaking シミュレーション (拡大図)

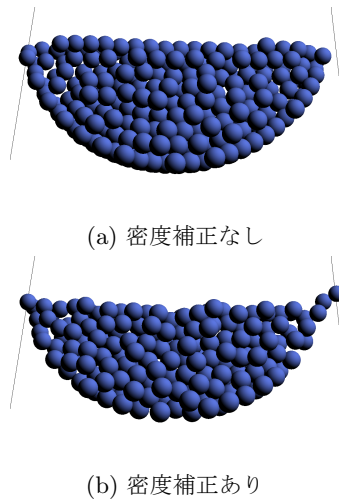


図 6: SLIM 曲面で表されたボウル形状に液体を落としたシミュレーション結果 (断面図)

## 7 まとめと今後の課題

本論文では SPH 法における固体境界とのインタラクションの問題を解決するために、密度計算式に周囲に存在する境界の影響を考慮した補正係数を導入した。補正係数の計算は境界が多項式で表されるという仮定を置くことで単純な積分で表し、また、複数の境界にまたがったときの合成方法を提案した。これらの方法により、固体境界に粒子を配置する必要がなくなり、粒子数を抑えたままシミュレーションの精度を向上させることができた。最終的に形状表現に多項式を用いる SLIM 曲面を導入し、それにより手法が複雑な形状にも対応できることを示した。

今後の研究としては現在 1 次多項式までしか対応できていないが、これをより高次の多項式にも対応させる必要がある。現在のところ 2 次元では 2 次多項式でも問題なく用いることができることを確認しているので、これを 3 次元へ拡張する。また、補正值計算の並列化による高速化、複数領域にまたがったときの  $\gamma$  計算方法の改良なども今後の課題としてあげられる。

## 謝辞

本研究は JSPS 科研費 25730069,25289021 の助成を受けたものです。

## 参考文献

[1] Nadir Akinci, Markus Ihmsen, Gizem Akinci, Barbara Solenthaler, and Matthias Teschner. Versatile rigid-fluid coupling for incompressible sph. *ACM*

*Trans. Graph.*, Vol. 31, No. 4, pp. 62:1–62:8, July 2012.

- [2] M. Becker, M. Ihmsen, and M. Teschner. Corotated sph for deformable solids. In *Proc. Eurographics Workshop on Natural Phenomena*, 2009.
- [3] Markus Becker and Matthias Teschner. Weakly compressible sph for free surface flows. In *SCA '07: Proceedings of the 2007 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pp. 209–217, 2007.
- [4] Markus Becker, Hendrik Tessenorf, and Matthias Teschner. Direct forcing for lagrangian rigid-fluid coupling. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol. 15, pp. 493–503, 2009.
- [5] Nathan Bell, Yizhou Yu, and Peter J. Mucha. Particle-based simulation of granular materials. In *SCA '05: Proceedings of the 2005 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pp. 77–86, New York, NY, USA, 2005. ACM.
- [6] Simon Clavet, Philippe Beaudoin, and Pierre Poulin. Particle-based viscoelastic fluid simulation. In *ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, pp. 219–228, July 2005.
- [7] Takahiro Harada, Seiichi Koshizuka, and Yoichiro Kawaguchi. Smoothed particle hydrodynamics in complex shapes. In *Proc. Spring Conference on Computer Graphics*, pp. 235–241, 2007.
- [8] Markus Ihmsen, Nadir Akinci, Markus Becker, and Matthias Teschner. A parallel sph implementation on multi-core cpus. *Computer Graphics Forum*, Vol. 30, No. 1, pp. 99–112, March 2011.
- [9] S. Kulasegaram, J. Bonet, R. W. Lewis, and M. Profit. A variational formulation based contact algorithm for rigid boundaries in two-dimensional sph applications. *Computational Mechanics*, Vol. 33, No. 4, pp. 316–325, 2004.
- [10] Miles Macklin and Matthias Müller. Position based fluids. *ACM Trans. Graph.*, Vol. 32, No. 4, pp. 104:1–104:12, July 2013.
- [11] J J Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, Vol. 68, No. 8, p. 1703, 2005.

- [12] M. Müller, R. Keiser, A. Nealen, M. Pauly, M. Gross, and M. Alexa. Point based animation of elastic, plastic and melting objects. In *SCA2004*, 2004.
- [13] Matthias Müller, David Charypar, and Markus Gross. Particle-based fluid simulation for interactive applications. In *Proc. ACM/Eurographics Symposium on Computer Animation 2003*, pp. 154–159, 2003.
- [14] Y. Ohtake, A. G. Belyaev, and M. Alexa. Sparse low-degree implicit surfaces with applications to high quality rendering, feature extraction, and smoothing. In *Proc. 3rd Eurographics Symposium on Geometry Processing*, pp. 149–158, 2005.
- [15] Hagit Schechter and Robert Bridson. Ghost sph for animating water. *ACM Trans. Graph.*, Vol. 31, No. 4, pp. 61:1–61:8, July 2012.
- [16] B. Solenthaler and R. Pajarola. Predictive-corrective incompressible sph. In *SIGGRAPH '09: ACM SIGGRAPH 2009 papers*, pp. 1–6, New York, NY, USA, 2009. ACM.

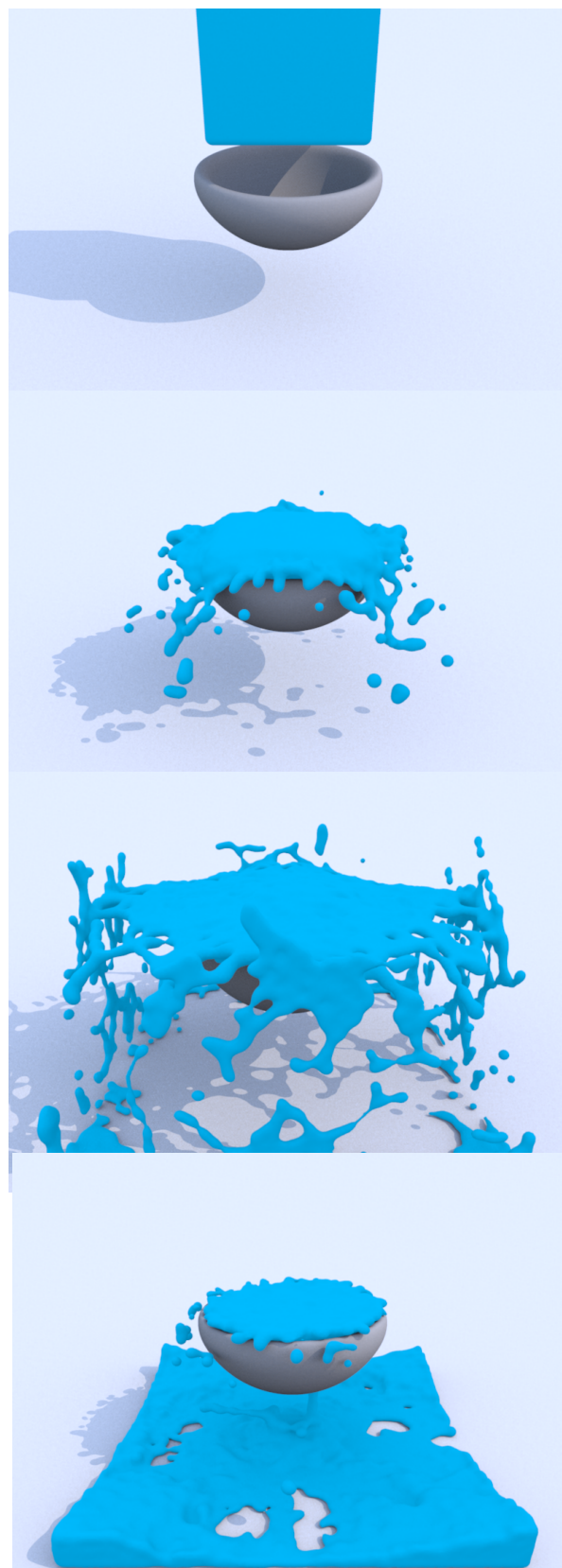


図 7: SLIM 曲面で表されたボウル形状に液体を落としたシミュレーション結果

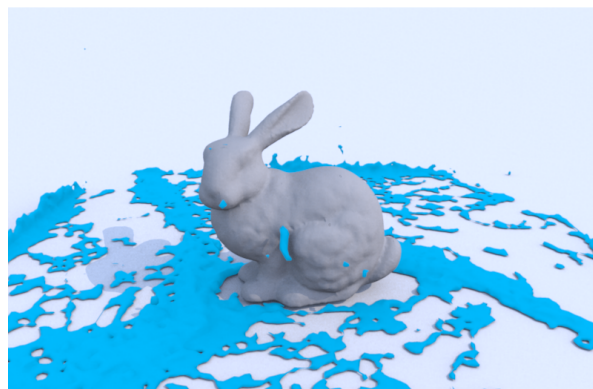
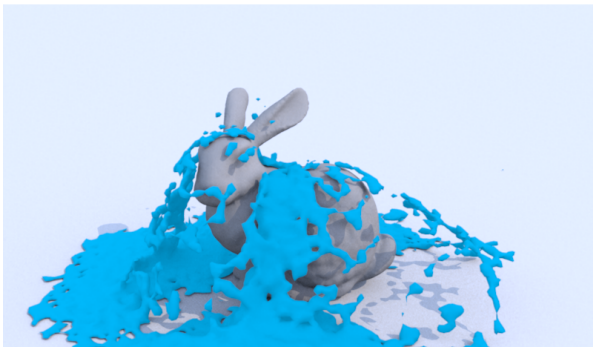
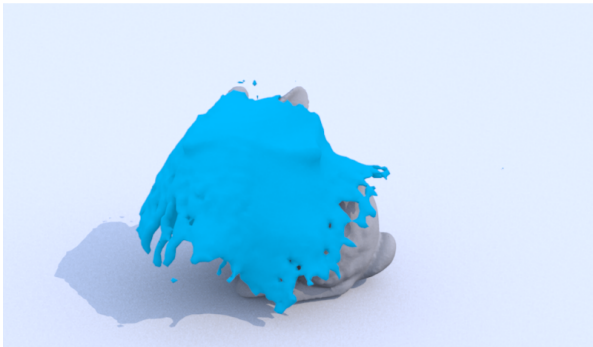
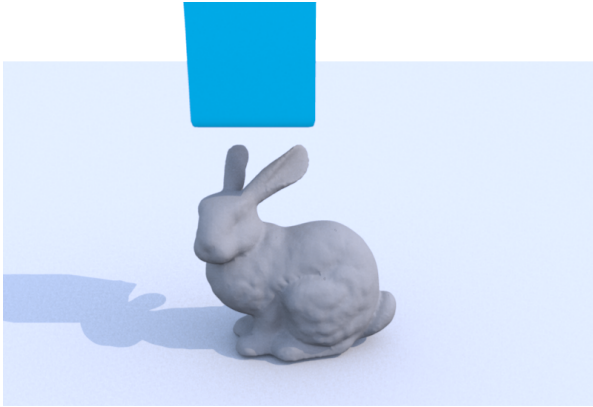


図 8: SLIM 曲面で表された bunny 形状に液体を落としたシミュレーション結果