

# 熱力学に基づいた相転移を伴う氷解現象のアニメーション

藤澤 誠<sup>†</sup> 三浦 憲二郎<sup>††</sup>

この論文では、熱力学・流体力学に基づいて氷解現象のアニメーションを生成する手法を提案する。提案手法は、熱伝導・対流熱伝達・熱輻射を考慮し、融解後の液体の挙動も計算する。対流熱伝達を考慮する場合、融解する氷（固体）と融解後の水（液体）だけでなく、周囲の空気（気体）の振る舞いも考慮しなくてはならず、この気液固三相を流体力学で計算することは非常に難しい問題である。我々は、VOF (Volume-of-Fluid) と呼ばれる単純なカラー関数を液体自由曲面追跡に用い、RCIP (Rational-Constrained Interpolation Profile) 法と改良した界面数値拡散の制御手法 (STAA 法) を用いることで、レンダリング時に現れる液体表面のエリアスの問題を解決する。また、気液固の三相を同じ計算空間内でシミュレーションし、各相間の質量の変化量を明示的に扱える簡潔でわかりやすい相変化シミュレーション法を提案する。さらに、熱輻射現象は、フォトンマッピング法を用いて効率的に計算し、レーザーによる融解現象などもアニメーション化する。

## Animation of Ice Melting Phenomenon with Phase Change Based on Thermodynamics

MAKOTO FUJISAWA<sup>†</sup> and KENJIRO T. MIURA<sup>††</sup>

This paper proposes a fast and efficient method for producing physically-based animations of the ice melting phenomenon, including thermal radiation as well as thermal diffusion and convective thermal transfer. Our method adopts a simple color function called VOF (Volume-of-Fluid) with advection to track the free surface, which enables straightforward simulation of the phase changes, such as ice melting. Although advection of functions that vary abruptly, such as the step function, causes numerical problems, we have solved these by the RCIP (Rational-Constrained Interpolation Profile) method. We present an improvement to control numerical diffusion and to render anti-aliased surfaces. The method also employs a technique analogous to photon mapping for calculating thermal radiation. By the photon mapping method tuned for heat calculation, the thermal radiation phenomenon in a scene is solved efficiently by storing thermal energy in each photon. Here, we report the results of several ice melting simulations produced by our method.

### 1. はじめに

近年の研究では、流体の振る舞いを流体力学によってシミュレートし、プロダクションクオリティのCGを作り出すことに成功している。さらに、その研究は多層流体・気液二相流体といった、流体力学においてもまだ議論が激しい分野にも及んでいる。この論文の目的は、氷解のシミュレーションである。氷解現象のような物質が溶ける現象は、われわれの身近に存在する自然現象のひとつであり、映画やCMなど多く

の分野で利用されている。例えば、グラスの中の水やジュースなどの表現において、氷の存在はリアリティを高める上で欠かせないものであり、グラスに水を注ぐ過程において、その水流に接する部分から早く溶けるといった現象を再現することも重要である。さらに、SF映画などに頻繁に現れるレーザーは固体を局所的に融解するだけでなく、直接熱を受けた場所の周囲も熱伝導や熱輻射により融解するなど複雑な挙動を示す。こういった現象を再現するためには固体と液体、それぞれのシミュレーションが必要であるだけでなく、正確な熱現象のシミュレーション、例えば、気体の流れ（対流熱伝達）や熱輻射の解析が必要不可欠である。そのためには、気体（空気）の流れと液体（水）の流れを同時に扱う気液二相流や気体と液体間の相変化をシミュレートしなければならない。我々は、相変化を伴う気液二相流を計算し、熱伝導、対流熱伝達、そして

<sup>†</sup> 静岡大学大学院理工学研究科

Graduate School of Science and Engineering, Shizuoka University

<sup>††</sup> 静岡大学創造科学技術大学院

Graduate School of Science and Technology, Shizuoka University

熱輻射も考慮した手法を提案する。

水などの液体をシミュレートするときに問題となるのが自由表面追跡である。CG においてもっともポピュラーな手法はレベルセット法<sup>2),3),5)</sup>である。レベルセット法は気体と液体の界面において十分滑らかであるような関数(例えば符号付距離関数)を用い、その値の正負によって液体と気体を区別する。レベルセット法は再初期化処理を必要なタイミングで行い、界面における平滑さを満足させる。この計算コストは非常に高い。また、固体から液体への相変化をシミュレートする場合に特別な処理を必要とする<sup>4)</sup>。

我々は液体において 1、気体において 0 となるような単純なカラー関数を用いて気液二相を表現する。この関数は VOF (Volume-Of-Fluid) 関数と呼ばれ、液体の計算セルにおける体積分率を表す。相変化をシミュレートするときには、その量を単純に増減させるだけでよい。氷解シミュレーションにおいてはこの液体界面の表現の方がレベルセットよりも適していると我々は考える。しかし、VOF 関数は液体界面において急激に変化するため、その移流法が問題となる。本研究では、VOF 関数を移流させるために、CIP (constrained interpolation profile) 法<sup>10)</sup>を用いる。CIP 法は多くの周波数成分を含み、急激な変化を見せる関数でもその形をほとんど崩さずに移流させることができる。Takahashi ら<sup>9)</sup>はこの CIP 法と VOF 法を組み合わせることで、しぶきや泡などを表現し、Song ら<sup>6)</sup>は CIP 法とレベルセット法を組み合わせた CIP-レベルセット法により気泡などの多相流体アニメーションを生成した。我々は、CIP 法を移流部分の計算に用いた、非圧縮性流体と圧縮性流体を同時に扱うためのよいフレームワークである C-CUP (CIP-combined and unified procedure) 法<sup>13)</sup>で流体支配方程式である Navier-Stokes 方程式を解く。

C-CUP 法において、流体シミュレーションを安定させるためには移流させる関数の界面をシャープに保つことが重要となる。オーバーシュートを抑えるために Yabe らによって開発された Tangent 変換を用いた CIP 法(以下 T-CIP 法)<sup>14)</sup>は、界面の拡散に対して逆拡散を掛ける効果を持ち、界面を常にシャープに保つように強制させることができる。しかし、CG で用いる場合、計算セルの大きさによって生まれる界面のエリアシングが問題となる。オーバーシュートを抑えるために開発されたもうひとつの手法として、有理関数 CIP 法(以下 RCIP 法)<sup>11)</sup>がある。RCIP 法は TCIP 法とは逆に、界面を拡散させてしまうが、これによりエリアシングが少なく滑らかな界面となる。そのため、

CG には適していると考えられる。本論文で、RCIP 法における界面拡散の問題を解決した STAA (Surface Tracking by Artificial Anti-diffusion) 手法<sup>16)</sup>を改良し、最適な界面の滑らかさを保ったまま、不必要な拡散を防ぐ CG 向けの改良を施した STAA 手法を提案する。提案方法により、シミュレーションの安定性を高め、VOF 法の欠点であった界面の滑らかさを改善することができる。

水解現象をシミュレートするためのもう一つのキーとなるのが熱力学シミュレーションである。熱は、熱力学の第一法則に従い、物体内で伝導し(熱拡散)、流体によって流れる(対流熱伝達)。これらは流体の法則とよく似ており、実際のシミュレーションでも流体の振る舞いのために記述したルーチンをそのまま用いることができる。熱現象と流体现象の大きな違いとなるのが熱輻射である。熱輻射は、熱エネルギーが中間の物質には無関係に、赤外線や可視光線を含む電磁波である熱線として伝達される伝熱形式である。我々は熱輻射の計算にフォトンマッピング法を用いる手法<sup>17)</sup>で熱解析を行う。

以下、本論文の構成はつぎの通りである。この論文の残りの部分は以下のように構成されている: 次章で我々の流体シミュレーション手法、CIP 移流法、液体の表面追跡、界面拡散制御について、第 3 章で固体と液体のインタラクションについて説明し、第 4 章では相変化や熱輻射を含めた熱力学シミュレーションについて述べる。そして、第 5 章で本手法の結果を示し、第 6 章で結言と今後の課題を述べる。

## 2. 流体シミュレーション

### 2.1 流体の支配方程式

流体の支配方程式は、Navier-Stokes 方程式である。表面張力まで考慮した非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式を以下に示す。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) T + a \nabla^2 T + S_r \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{u}$  は流体速度、 $\nu$  は動粘性係数、 $\rho$  は流体の密度、 $T$  は温度、 $p$  は圧力、 $\mathbf{f} = \mathbf{F}_{st} + \mathbf{g}$  は外力であり、表面張力  $\mathbf{F}_{st}$  と重力  $\mathbf{g}$  から成る。そして、 $S_r$  は放射エネルギー、 $a$  は熱拡散率である。我々は、圧力ベース解法の一つである C-CUP 法<sup>13)</sup>で Navier-Stokes 方

程式を解く．離散化にはスタガード MAC グリッドを用い，圧力のポアソン方程式の解法には ICCG 法 (不完全コレスキー分解共役勾配法) を使用した．温度  $T$  を，グリッド中心でスカラー値として定義し，式 (3) を用いて，移流・拡散する．温度は流体だけでなく固体内でも定義し，固体内では熱伝導で熱が伝わり，固体表面において対流熱伝達により流体に熱エネルギーが伝達する．粘性拡散・熱拡散の計算は，Carlson らの高粘性ソルバ<sup>1)</sup> を用いた．

## 2.2 CIP 移流法

液体の表面を追跡するために移流方程式を解く．レベルセット法では移流すべき陰関数 (レベルセット関数) が境界で十分なめらかであることを保証することで，移流方程式を低次で離散化して解く．これとは逆に，CIP 法では，移流方程式の離散化にスプライン補間に似た 3 次精度以上の高精度な手法を用い，界面において激しく変化する関数であってもその形状を保持したまま，数値振動を起こさずに移流することができる．

移流させたい関数を  $f(x, t)$  とすると，セミラグランジュ法<sup>7)</sup> ではバクトレースした位置における関数値  $f(x - u\Delta t, t - \Delta t)$  で現在の位置における関数値を更新する．CIP 法の基本的なアイデアは，移流式を空間微分したとき，その導関数  $g(x) = \partial f(x)/\partial x$  もまた， $f(x)$  と同様に移流させるということである (ただし， $\partial u/\partial x = 0$  とする)．例えば，1 次元の移流では，2 メッシュ  $i, i+1$  間のプロファイルは，以下の 3 次補間関数で表される．

$F_i(x) = a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i$  (4)  
グリッド上の 4 拘束条件  $f_i, g_i, f_{i-1}, g_{i-1}$  から  $a_i, b_i, c_i, d_i$  を計算する．

この手法は非常に簡単に見えるが，その効果は非常に良好である．一次元矩形波を移流した例を図 1 に示す．移流速度  $u$  は一定とし，一次元の矩形波を十分な距離移流した後のプロファイルを描いている．(b) の風上差分ではプロファイルがなだらかになってしまっているが，(c), (d) の CIP 法を用いたものは元の形状を保ったまま移流できている．(d) の RCIP については 2.3 節で詳しく述べる)．CIP 法のこの特徴により，レベルセット法のように滑らかな関数を用いなくても，液体表面を追跡することができ，計算コストの高い再初期化処理を必要としない．

## 2.3 液体界面追跡

我々は VOF 関数と呼ばれる計算セル内の液体の体積分率を示す関数  $\phi$  を導入し，それを CIP 法で移流させる．

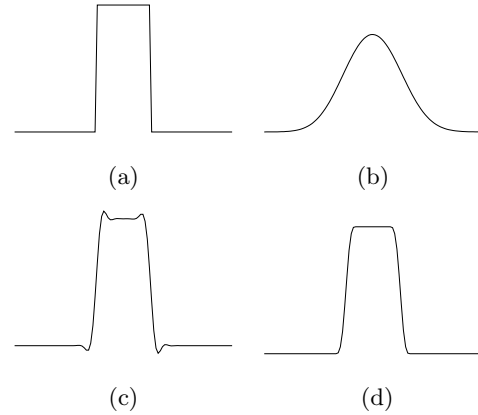


図 1 一次元矩形波の移流: (a) 初期状態, (b) 風上差分法, (c) CIP 法, (d) RCIP 法で移流した後のプロファイル

Fig. 1 Advection of 1-dimensional square wave: (a) Initial states; (b) Upwind difference; (c) CIP; (d) Rational-CIP profiles after advection.

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \text{water} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

この関数は以下の移流方程式に支配される．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi = 0. \quad (6)$$

VOF 関数を移流させるとき，若干のオーバーシュート・アンダーシュートが発生する (図 1(c) 参照)．液体と気体間の物理量の差が激しいときにこれが大きな問題となる．そこで，有理関数を用いてプロファイルを補間する有理関数 CIP 法 (以下 RCIP 法)<sup>11)</sup> を用いる．RCIP 法では式 (4) の 3 次関数の代わりに有理関数

$$F_i(x) = \frac{a_i(x-x_i)^3 + b_i(x-x_i)^2 + c_i(x-x_i) + d_i}{1 + \alpha\beta(x-x_i)} \quad (7)$$

を用いる．ここで  $\alpha$  はパラメータで 0 から 1 の値をとる． $\alpha = 0$  のときは CIP 法と同じであり， $\alpha = 1$  のとき，この関数は単調性と凹凸性を保存する有理関数となる． $\beta = -((S - g_i)/g_{i-1} - 1)/\Delta x$  であり， $S = -(f_{i-1} - f_i)/\Delta x$  である．

RCIP 法以外にも，Tangent 変換を用いることでオーバーシュートを抑える方法も提案されている<sup>15)</sup>．Tangent 変換を用いた手法では物体界面がシャープに保たれるという特徴を持つ．これは数値流体計算上は非常に有益であるが，CG で用いた場合，グリッド解像度によっては液体表面があまり滑らかにならず，保存性も保証されない．RCIP 法では，Tangent 変換 CIP 法に比べると界面付近で VOF 関数  $\phi$  が拡散する傾向にあるが，これにより滑らかな表面が得られ，さらに

CIP-CSL2 法<sup>12)</sup> などにより保存性を保証することもできる。これらのことから、本研究は RCIP 法を用いる。ただし、数値拡散が広がると計算が発散してしまうため、2.4 節において、適切に拡散を抑制するための新しい STAA 法を提案する。

#### 2.4 界面拡散制御

RCIP 法による VOF 関数の移流では、界面を表す 0 から 1 への変化部分が拡散し、関数の傾きがなだらかになる。この滑らかな界面は CG での利用においては美しいレンダリング結果を生むが、シミュレーションでは数値的な不安定性を引き起こす。界面拡散の抑制のために、池端らは VOF 関数の体積移動による STAA 手法<sup>16)</sup>を開発した。彼らの手法では、VOF 関数から生成した符号付距離関数を法線方向の計算のために利用したが、我々は、符号付距離関数の生成にかかる計算コストを削減するために、平滑化した VOF 関数  $\bar{\phi}$  を代わりに用いる。 $\bar{\phi}$  は、VOF 関数  $\phi$  の周囲 27 グリッド (2D では 9 グリッド) の重み付き平均をとって勾配をなだらかにした関数である。符号付距離関数に比べるとその精度は悪くなると予想されるが、我々がシミュレーションした結果では、CG での使用では問題は発生しなかった。

法線方向  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  が決定した後、移動する体積量  $V$  を決定する。移動量を  $r$  と置くと、

$$V = (\Delta x - r|n_x|)(\Delta y - r|n_y|)(\Delta z - r|n_z|). \quad (8)$$

ここで  $r$  は、全ボリュームが移動するならば  $V = 0$  と考え、

$$r = \min(\delta x/|n_x|, \delta y/|n_y|, \delta z/|n_z|) \quad (9)$$

とする。

この手法では、シャープな液面が得られるが、CG で用いる場合、シャープすぎるのもレンダリングの観点から適切でない。これを解決するために、STAA 法の移動量  $r$  の制御に上記の平滑化 VOF 関数  $\bar{\phi}$  を用いる。 $G = \alpha|\bar{\phi} - 0.5|$  となる  $G$  を求め、移動量  $r$  を以下の式で算出する。

$$r = G^d \min(\delta x/|n_x|, \delta y/|n_y|, \delta z/|n_z|). \quad (10)$$

移動量を  $\alpha$  と  $d$  の 2 つのパラメータで調節することで、界面の拡散をある程度の幅を保ったまま抑制する。我々の実験では、 $d$  を次元の数、つまり、2D で  $d = 2$ 、3D で  $d = 3$  とし、 $\alpha = 1.0$  とすると良好な結果が得られた。 $G$  は RCIP 移流の特性から、 $-0.5 \leq G \leq 0.5$  となることが保証されているので、 $\phi = 0.5$  において  $r = 0$  となりもとの界面形状が保存される。また、 $G$  の冪乗をとることで界面に近づくほど移動量が減り、ある程度の滑らかさを保ったまま移動させることがで

きる。

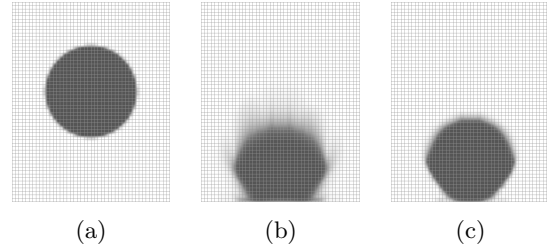


図 2 2D 落下水滴シミュレーション: (a) は初期状態, (b),(c) はそれぞれ, RCIP 法と我々の改良型 RCIP-STAA 法による結果。

Fig. 2 2D simulation of falling droplets: (a) Initial state; (b) Simulation result by RCIP method; (c) Simulation result by our STAA method.

二次元での水滴落下実験を行った例を図 2 に示す。RCIP 法では移流方向に大きな数値拡散が発生しているが、我々の改良 STAA 法では数値拡散が抑えられ、かつ界面においてエイリアスが発生していないため、レンダリング時にスムーズな液体表面が得られる。

### 3. 固体との相互作用

固体と液体の相互作用は水解現象のアニメーションを生成する際における重要な要素のひとつである。本研究では、固体に対しても液体と同じように密度関数を割り当てることで、固体と液体の相互作用を実現する。つまり、固体内部で 1、外部で 0 となる固体密度関数  $\phi_s$  を定義する。あるグリッドにおける物体の速度を  $\mathbf{u}_s$  とすると、流体速度  $\mathbf{u}_f$  は、

$$\frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} = -\gamma(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_s)\phi_s \quad (11)$$

によって固体から影響を受ける。ここで、 $\gamma$  は物体の速度に対して流体の速度がどの程度追随するかを表すための係数である。固体の密度関数は流体と同様に速度  $\mathbf{u}_s$  で移流するので、

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla \phi_s = 0 \quad (12)$$

である。これは移流方程式であり、2.2 節で述べた方法で解くことができる。固体の速度  $\mathbf{u}_s$  は並進運動  $\mathbf{u}_T$  と角速度  $\Omega$  に分けて考えることができる。固体に対して流体からかかる力は固体表面にかかる力を積分したものとなる。我々は固体が含まれるグリッド上の加速度を合計していく方法<sup>15)</sup>を用いる。固体の受ける力は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}_T}{\partial t} &= \frac{1}{M} \int \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} \rho \phi_s dV \\ \frac{\partial(\Pi \Omega)}{\partial t} &= \int \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} \rho \phi_s dV\end{aligned}\quad (13)$$

ここで、 $M = \int \rho \phi_s dV$  は固体質量、 $\mathbf{r}$  は固体の重心からのユークリッド距離、 $\Pi = \int \mathbf{r} \mathbf{r} \rho \phi_s dV$  は慣性モーメントテンソルである。

この方法の利点は、固体の密度関数も流体の密度関数のように扱えるので、流体と同じコードを用いることができることと、計算においてそのグリッドが固体であるかどうかをユーザが意識して実装する必要がない点である。単に全体の領域においてすべての力  $\rho \partial \mathbf{u}_f / \partial t$  を合計するだけであり、 $\phi_s$  によって自動的に固体の有無が判別される。これは逆に不必要な領域での計算を含んでしまうが、計算の並列化を行いたい場合、条件判別がない方がより適切である。欠点は、複数の固体が存在した場合、その衝突判定や運動の制御が難しくなることである。CG 分野で用いられている衝突判定などを含めた剛体シミュレーションエンジンでは、一般的に、各固体はその位置と姿勢に関する情報を持ち、それを元に剛体運動を計算する。我々は複数の剛体同士の衝突をより簡単に扱えるようにするために、固体を流体とは別の座標系で扱う手法を提案する。つまり、固体密度関数  $\phi_s$  は液体密度関数  $\phi$  とは別のグリッドで定義され、そのグリッドは流体計算空間全体ではなく、固体の周りでだけ定義する。式 (13) で各固体の並進運動と回転運動量が得られるため、固体グリッドの位置と姿勢をこれらで補正していくことで、グリッドごと固体を移動させる。

## 4. 熱力学シミュレーション

### 4.1 フォトンマッピング法による熱輻射計算

従来の放射伝熱解析では、放射エネルギーを連続量として取り扱っていた。しかし、熱輻射エネルギーを連続可変量としてではなく、ひとつひとつが一定のエネルギー量を有する粒子（フォトン）として考えることで、フォトンマッピング法を用いて解析することができる。我々は、文献 17) の手法により熱輻射解析を行った。

#### 4.1.1 熱源からの放射エネルギーの射出

熱源からの放射エネルギーを連続量としてではなく、一定のエネルギー量を有するフォトンが射出されると考える。ステファン・ボルツマンの法則より、熱源から射出される単位面積、単位時間あたりのエネルギー量は  $\sigma T^4$  なので、表面積  $A$  の熱源から放出されるフォトン数を  $N$  とすると、フォトン 1 つあたりの熱エネルギーは以下となる。

$$E_p = \frac{\varepsilon \sigma T^4 A \Delta t}{N} \quad (14)$$

ここで、 $\Delta t$  はフォトン放射時間、 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} [W/m^2 \cdot K^4]$  はステファン・ボルツマン定数、 $\varepsilon$  は放射率 (emissivity) である。

本研究では、フォトンを「毎時間ステップごと放射」するので、 $\Delta t$  は時間ステップ幅と等しい。また、CG にこれらの法則を導入するため、物体表面の拡散反射率と鏡面反射率のパラメータに放射率  $\varepsilon$  を格納する。これにより、従来のフォトンマッピングプログラムに新たにパラメータを追加することなく計算が可能となる。

#### 4.1.2 射出方向

熱源を散乱面と仮定した場合、フォトンの射出方向分布  $(\theta, \phi)$  は、ランバートの法則に従う。球面座標系を考えた場合、熱源要素からのフォトン射出方向  $(\theta, \phi)$  は、 $[0, 1]$  の一様乱数  $\xi_\theta, \xi_\phi$  を用いることで次式となる。

$$\begin{aligned}\theta &= 2\phi \xi_\theta \\ \phi &= \cos^{-1} \sqrt{1 - \xi_\phi}\end{aligned}\quad (15)$$

ここで、 $\xi_\theta$  と  $\xi_\phi$  は  $[0, 1]$  の一様乱数である。

本研究では拡散熱源に加えて、レーザーのような方向性がある熱源をシミュレートする。レーザーの場合、熱放射は一方方向であり、ある面積を持った熱源のランダムな位置からその方向へフォトンを放射する。

#### 4.1.3 放射エネルギーの反射および吸収

熱エネルギーを持つフォトンが物体に到達した場合、物体表面での反射または吸収を考える必要がある。物体表面に入射した放射エネルギーは、表面の吸収率  $\alpha$  に相当する量が吸収され、 $(1 - \alpha)$  に相当する量が反射される。本研究では、フォトンマッピング法と同様に、各フォトンの熱エネルギーを修正するのではなく、一様乱数  $\xi \in [0, 1]$  を用いて、式 (16) で反射・吸収を決定する。

$$\begin{aligned}\xi \leq \alpha & \text{ Absorption} \\ \xi > \alpha & \text{ Reflection}\end{aligned}\quad (16)$$

ロシアンルーレットを用いることで、少なくとも同一の熱源から放出したフォンは、同じ熱エネルギーを持つ。そのため、入射熱エネルギーを計算するときには、計算セル内に存在するフォトン数を数えるだけでよい。 $\varepsilon$  の場合と同様に  $\alpha$  の値は、物体表面の拡散反射率と鏡面反射率を用いる。

#### 4.1.4 熱放射による温度上昇

各時間ステップにおいて、放出されたフォンを各計算セルでカウントし、その情報から熱放射による温

度上昇を計算する．フォトンひとつあたりの温度上昇は以下となる．

$$\Delta T_p = \frac{E_p}{c\rho h^3} \quad (17)$$

ここで、 $E_p$  はフォトンひとつあたりのエネルギーであり、式 (14) より算出する． $h$  はボクセルのグリッド幅である．

#### 4.2 相 転 移

物質は固相、液相、気相の 3 態に分かれ、1 つの相から別の相への状態変化を相転移といい、本研究で扱う氷解現象のように固相 → 液相の変化も相転移のひとつである (このときの温度を融点と呼ぶ)．固相から液相への相転移では、固相の分子結合を破壊するためにエネルギーが用いられる．このエネルギーを潜熱という．潜熱を  $L$  とすると、単位体積・単位時間あたりの相転移質量は以下となる．

$$M = \frac{H}{L} \quad (18)$$

ここで、 $L$  は潜熱、 $H = \rho C_p \partial T / \partial t$  は熱エネルギーで温度変化によって与えられる．各計算セル  $i$  の温度変化  $\partial T / \partial t$  から相転移質量  $M_i$  を計算し、融解物質の密度から体積分率の変化  $dV$  を算出する．我々は、固体用の VOF 関数を用いて固体を表現し、それにより固体-液体間の相互作用を計算しており、この固体用の VOF 関数から  $dV$  を引き、対応するセルの液体用の VOF 関数にそれを足すことで相転移をシミュレートした．

## 5. 結 果

この章では提案手法を用いて作成したアニメーションを示す．使用した PC の CPU は Pentium4 3.6GHz であり、その主記憶は 2GB である．

液体中で溶けていく固体の例として、図 3 に熱湯に氷を落下させたシミュレーション結果を示す．氷の初期温度は  $-10^\circ\text{C}$ 、湯は  $90^\circ\text{C}$ 、融点は  $0^\circ\text{C}$ 、比熱  $[kJ/(kg \cdot K)]$ 、熱伝導率  $[W/(m \cdot K)]$  (熱拡散率は熱伝導率を比熱と密度で割ったもの) は、氷：8.86, 2.2、水：4.17, 0.612、空気：1.01, 0.0265 である．固体を VOF 関数で定義したので、液体への変化がスムーズに実現できた．また、ポリゴンから生成した陰関数場により複雑な形状の固体 VOF 関数を定義することも可能である．

我々のシステムでは、気液二相流をシミュレートしているため、空気が流れることによる対流熱伝達も考慮されている．図 4 にわかりやすい例を示す．図中のダクトから左下方向に風を起こし、対流の有無による

溶け方の違いを確かめた．このとき、立方体の氷の下半分を水で満たし、熱拡散による溶け方の違いが起こらないように、空気と水の温度と熱拡散係数を同じとなるように設定した．水は空気と密度差が 1000 倍ほどあり、空気中の弱い対流であれば、あまり水中の流れに影響しないので、氷の上部ほど速く溶けていき、下部の部分はあまり溶けていないことがわかる．温度差が生じることによる自然対流でもある程度溶けるが、強制的に風を起こすことによる強制対流は氷をより速く溶かす効果がある．図 5 は氷の上からお湯をかけた様子をシミュレートしたものである．対流熱伝達により流れが激しいところでは溶けるのが速くなるため、固体の上部がえぐりとられるように溶けている様子をシミュレートできた．

また、フォトンマッピングによる熱輻射のシミュレーション結果として、図 6 に拡散熱源と鏡による融解、図 7 にレーザーによる融解を示す．図 7 では体積保存性の欠如により、融解後の液体が急激に減少してしまっている．この原因は界面追跡における体積損失である．空気中での融解現象では、固体表面に溶けた液体が薄いシート状に張り付く状態となるが、われわれの手法では、このような薄い液体が拡散し、体積損失が起こる．あらゆる融解現象を再現するためには、これは大きな問題である．

これらのアニメーションでは数ステップごとに 1 フレームを出力し、計算時間は 1 ~ 2 分/ステップである．計算時間の大きな部分は流体計算と CIP 補間である．特に Navier-Stokes 方程式を解くときの圧力のポアソン方程式計算部分において、液体界面での 1000 倍もの密度差が、共役勾配法における収束速度を大きく低下させてしまった．

## 6. まとめと今後の課題

この論文では、VOF 関数を液体界面追跡に使い、CG のためのアンチエイリアスを実現する改良した RCIP-STAA 法でこれを移流することで、レンダリング時の液体表面のエイリアスの問題を解決し、簡単に実装しやすい液体-固体間の相転移シミュレーションを可能とした．さらに、フォトンマッピング法による熱輻射計算の応用としてレーザーによる融解現象などを示した．

本研究で用いた VOF 関数と CIP 法による流体シミュレーションは、関数値が各計算セルの体積分率を表しており、相変化シミュレーションを VOF 関数間での単純な体積交換で実装することができた．このことから符号付距離場を用いるレベルセット法に比べて

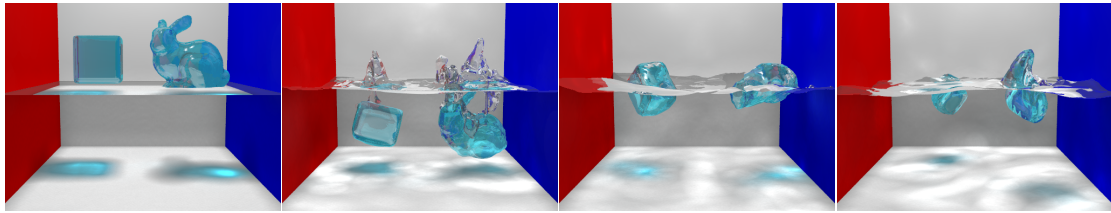


図 3 熱湯 (90 °C) 中に落下する固体 . グリッド数は  $64 \times 64 \times 64$  .

Fig. 3 An ice cube and an ice bunny falling into 90 °C hot water ( $64 \times 64 \times 64$  grid) .

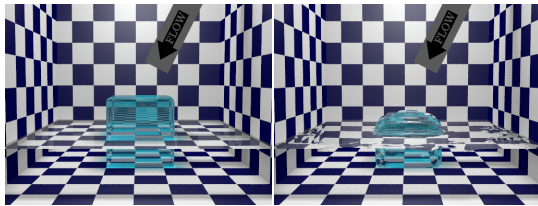


図 4 空気の対流による溶け方の違い . “FLOW” と書かれたダクトから空気が流れ出ている . ため , 空気中には常に対流が発生するが , 水中はあまり対流しないため上下で溶ける速度が異なる . グリッド数は  $50 \times 50 \times 50$  .

Fig. 4 Differences of the melting speeds with convective heat transfer. The duct labeled “FLOW” is blowing air, and gas convection always exists in air. As water does not have much convection flow, the melting speeds of the ice cube above and below water are different ( $50 \times 50 \times 50$  grid).

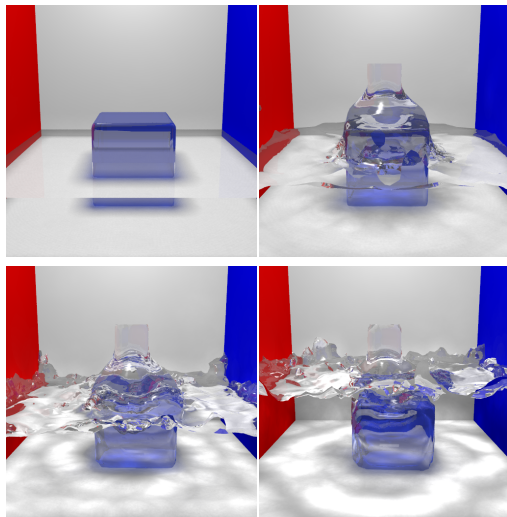


図 5 熱湯 (90 °C) をかけられた固体 (立方体) . 強制対流熱伝達により立方体の上部がより大きく溶けている . グリッド数は  $64 \times 64 \times 64$  .

Fig. 5 Pouring 90 °C hot water onto an ice cube. The top of the ice cube is melting more rapidly due to forced convective heat transfer ( $64 \times 64 \times 64$  grid).

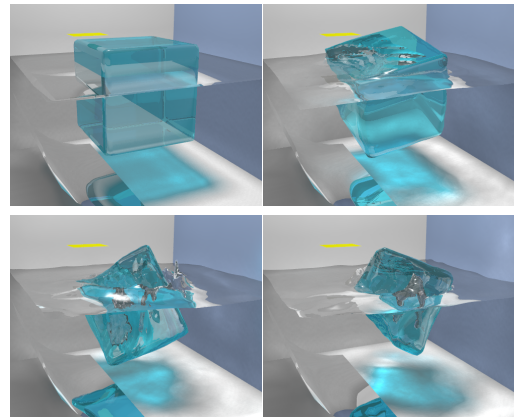


図 6 フォトンマッピング法による熱放射シミュレーション . 図中の黄色のプレートが拡散熱源 , 左下の円筒状の物体が鏡である . グリッド数は  $64 \times 64 \times 64$  .

Fig. 6 Thermal radiation simulation by photon mapping. The yellow plate in the figure is a heat source, and The quarter of cylinder located on the lower left hand of the solid is a mirror ( $64 \times 64 \times 64$  grid).

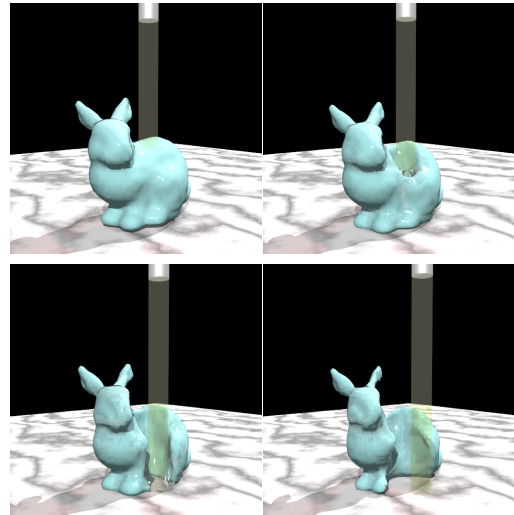


図 7 レーザーによる融解 . 図の上方にある円筒系の発射源からレーザーを照射した . グリッド数は  $64 \times 64 \times 64$  .

Fig. 7 Laser melting. A laser beam is used to radiate from a cylindrical source located at the top of the figure, ( $64 \times 64 \times 64$  grid).

VOF+CIP 法は相転移シミュレーションに適した手法であると我々は考える。

今後の発展としては、体積の保存性をより正確に満足させるために、CIP-CSL<sup>12)</sup> などの方法を用いることである。また、VOF 関数による液体表現では、相転移を容易にシミュレートできるが、グリッドを用いた液体シミュレーションでは、グリッド幅以上の大きさを持つ液体の流れしかシミュレートできない。固体が溶けたときにできる固体周りの液体による薄いシェル (thin shell) のシミュレートのために、八分木表現などが考えられるが、これも根本的な解決法ではない。我々が今考えている解決法は、文献 8) のような 2 次元シミュレーションと 3 次元シミュレーションの融合手法である。

提案手法を用いれば、氷解現象に加えて、その逆の氷化現象、あるいは、液体-気体間の相変化である沸騰・凝縮現象もまた容易に実装できると考えられ、それらの実装も今後の課題である。

#### 参 考 文 献

- 1) Carlson, M., Mucha, P.J., Van Horn III, R.B. and Turk, G.: Melting and Flowing, *ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*, pp.167-174 (2002).
- 2) Enright, D., Marschner, S. and Fedkiw, R.: Animation and rendering of complex water surfaces, *Proceedings of SIGGRAPH 2002*, pp. 736-744 (2002).
- 3) Enright, D., Nguyen, D., Gibou, F. and Fedkiw, R.: Using the particle level set method and a second order accurate pressure boundary condition for free surface flows, *Proceedings of the 4th ASME-JSME Joint Fluids Engineering Conference* (2003).
- 4) Losasso, F., Irving, G., Guendelman, E. and Fedkiw, R.: Melting and burning solids into liquids and gases, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol.12, No.3, pp.343-352 (2006).
- 5) Osher, S. and Fedkiw, R.: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer-Verlag (2003).
- 6) Song, O.-Y., Shin, H. and Ko, H.-S.: Stable but Non-Dissipative Water, *ACM Transactions on Graphics*, Vol.24, No.1, pp.81-97 (2005).
- 7) Stam, J.: Stable fluids, *Proceedings of SIGGRAPH 1999*, pp.121-128 (1999).
- 8) Stam, J.: Flows on surfaces of arbitrary topology, *Proceedings of SIGGRAPH 2003*, pp.724-731 (2003).
- 9) Takahashi, T., Fujii, H., Kunimatsu, A., Hiwada, K., Saito, T., Tanaka, K. and Ueki, H.: Realistic Animation of Fluid with Splash and Foam, *Computer Graphics Forum (Eurographics 2003 Proceedings)*, Vol.22, No.3, pp.391-400 (2003).
- 10) Takewaki, H. and Yabe, T.: The cubic-interpolated pseudo particle (CIP) method: application to nonlinear and multi-dimensional hyperbolic equations, *Journal of Computational Physics*, Vol.70, pp.355-372 (1987).
- 11) Xiao, F., Yabe, T. and Ito, T.: Constructing oscillation preventing scheme for advection equation by rational function, *Computer Physics Communications*, Vol. 93, pp. 1-12 (1996).
- 12) Yabe, T., Tanaka, R., Nakamura, T. and Xiao, F.: An Exactly Conservative Semi-Lagrangian Scheme (CIP-CSL) in One Dimension, *Monthly Weather Review*, Vol.129, pp.332-344 (2001).
- 13) Yabe, T. and Wang, P.Y.: Unified Numerical Procedure for Compressible and Incompressible Fluid, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol.60, pp.2105-2108 (1991).
- 14) Yabe, T. and Xiao, F.: Description of Complex and Sharp Interface during Shock Wave Interaction with Liquid Drop, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol.62, No.8, pp. 2437-2540 (1993).
- 15) Yabe, T., Xiao, F. and Utsumi, T.: The Constrained Interpolation Profile Method for Multiphase Analysis, *Journal of Computational Physics*, Vol.169, pp.556-593 (2001).
- 16) 池端昭夫, 肖 鋒: 保存型自由表面捕獲スキームと固液気 3 相流への適用, 日本機械学会 2002 年度年次大会 (2002).
- 17) 藤澤 誠, 三浦憲二郎: 熱力学に基づく氷解現象のアニメーション, 情報処理学会論文誌, Vol.47, No.8, pp.2746-2753 (2006).

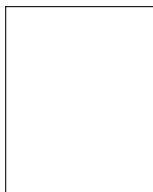
(平成 19 年 5 月 0 日受付)

(平成 19 年 12 月 0 日採録)

藤澤 誠 (正会員)

昭和 55 年生・平成 15 年静岡大学工学部機械工学科卒業・平成 17 年静岡大学大学院理工学研究科修士課程修了・静岡大学大学院理工学研究科博士課程在学中・日本学術振興会特別研究員 DC・物理シミュレーション等の研究に従事・ACM 会員。





三浦憲二郎（正会員）

昭和 34 年生．昭和 57 年東京大学工学部精密機械工学科卒業．昭和 59 年同大学院修士課程修了．同年，キャンノン（株）入社．機械系 CAD/CAM システムの開発に従事．平成 3 年コーネル大学機械工学科博士課程修了（Ph.D.）．平成 5 年会津大学コンピュータ理工学部コンピュータソフトウェア学科助教授．平成 9 年静岡大学工学部機械工学科助教授．平成 16 年同教授．平成 18 年同大学創造科学技術大学院教授．形状処理工学，CAD/CAM，物理シミュレーション等に興味を持つ．ACM，IEEE 各会員．

---